Four Open Questions for the N-Body Problem
Un livre de Richard Montgomery*

Alain Chenciner†

Le problème (Newtonien ou classique) des N corps consiste en l'étude des mouvements que peuvent avoir dans l'espace à trois dimensions N masses ponctuelles positives $m_1, m_2, \cdots, m_N$ s'attirant mutuellement selon la loi de Newton. Cela signifie qu'à un instant donné t, les positions $\vec{r}_i(t), i = 1, 2, \cdots, N$ des corps par rapport à un point pris comme origine forment une solution du système d'équations différentielles du second ordre

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{||\vec{r}_j - \vec{r}_i||^3} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \quad \text{où} \quad U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}.$$

Remplacer les corps par des masses ponctuelles se justifie par la Propositio VIII, Theorem VIII du livre III des *Principia* de Newton qui affirme que l'attraction exercée par un corps ayant une symétrie sphérique est la même que si toute sa masse était concentrée au centre de gravité.

Newton lui-même avait compris qu'expliquer à l'aide de ces équations le mouvement des planètes du Système solaire ne serait pas jeu d'enfant. Des doutes étaient en particulier apparus au vu de la difficulté de rendre compte du mouvement de l'apogée de la Lune (voir [7]). Pendant plus de deux siècles des études de plus en plus raffinées furent consacrées à la "théorie des perturbations", approximations successives à partir de celle qui, les masses des planètes étant petites par rapport à celle du Soleil, suppose que leur mouvement pendant un laps de temps suffisament court n'est sensiblement influencé que par le Soleil et a donc approximativement lieu le long d'une ellipse keplerienne. De même, dans les mouvements de la Lune autour de la Terre on commence par négliger l'influence du Soleil, 390 fois plus éloigné, par rapport à celle de la Terre.

Des changements déterminants se produisent à la fin du dix-neuvième siècle avec les découvertes fondamentales de Poincaré et sa preuve, précisant celle de Bruns, que le problème des trois corps est "non-intégrable" au sens où n'existe aucune autre quantité conservée (intégrale première) que celles dues aux symétries des équations (voir [9, 10]). On est en fait surpris par la richesse des comportements qu'engendrent, dès que le nombre de corps est au moins

*Originellement écrite en anglais à la demande des *Notices of the American Mathematical Society* qui l'a trouvée trop technique, cette recension a été traduite et légèrement révisée par son auteur.

†LTE, Observatoire de Paris et Université Paris Cité

égal à trois, des équations apparemment aussi simples et une grande partie du présent livre est dédiée à des questions qui concernent des solutions "globales" (au sens de non perturbatives) telles celle représentée sur la couverture.

Et quelle bonne idée ce fut, avant une quelconque théorie, d'ouvrir le livre par un Chapitre -1 (sic !) qui est une introduction visuelle à un certain nombre de telles solutions globales périodiques du problème des N-corps, par exemple :

– les orbites kepleriennes lorsque $N \leq 2$, et leurs généralisations à un plus grand nombre de corps, les solutions homographiques découvertes par Euler et Lagrange pour trois corps, solutions qui sont l'objet de la première question ;

– les solutions dites "chorégraphiques" du problème des N-corps à masses égales [23], en commençant par le Huit (Moore, Chenciner-Montgomery) qui, lorsque $N = 3$, partage avec l'équilibre relatif équilatéral de Lagrange la propriété que les trois corps se poursuivent à intervalles de temps égaux le long non plus d'un cercle mais d'une courbe en forme de huit et qui lui est reliée par la famille P_{12} de Marchal. Famille de chorégraphies en repère tournant invariantes par une action du groupe D_6 d'ordre 12 , cette dernière aboutit au Huit en repère inertiel à partir de la solution équilatérale de Lagrange parcourue deux fois car considérée dans un repère faisant un tour par période en sens opposé au mouvement : le cercle parcouru deux fois s'ouvre comme une huitre jusqu'à former un huit [12] ;

– les Hip-Hop (Chenciner-Venturelli) où quatre masses égales hésitent dans $\mathbb{R}^3$ entre former un carré qui admettrait un mouvement d'équilibre relatif dans $\mathbb{R}^2$ et un tétrahèdre régulier pour qui un tel mouvement ne serait possible que dans $\mathbb{R}^4$;

– la solution de Schubart du problème de trois masses égales sur la droite qui, une fois régularisées les collisions doubles, devient périodique, et ses continuations, les solutions de Broucke-Hénon, qui deviennent périodiques en repère tournant ;

– les solutions de Sitnikov du "problème restreint des trois corps" dans lesquelles une masse nulle oscille le long d'une droite orthogonale au plan dans lequel les deux autres masses décrivent une solution du problème des deux corps ;

– des solutions dans lesquelles $N \geq 4$ corps forment une "singularité de non-collision", certains des corps s'échappant à l'infini en temps fini ;

– des solutions chorégraphiques possédant diverses symétries, en particulier celles de chacun des solides platoniciens.

Ce catalogue est suivi d'un Chapitre 0 qui, une fois introduite une manière géométrique d'écrire les équations de Newton (métrique des masses sur l'espace des configurations, champ de vecteurs dans l'espace des phases), est essentiellement dédié à l'invariance des équations sous le groupe de symétries de Galilée, les lois de conservations qui s'en déduisent via le théorème de Noether – énergie, moments linéaire et angulaire – et le "problème réduit" qui résulte de leur prise en compte. La symétrie d'échelle due à la forme particulière du potentiel est également introduite.

Vient ensuite une vieille connaissance de Richard Montgomery, "l'espace des formes" (Shape Space) dont les éléments sont les formes que peut prendre un ensemble de N corps ponctuels à homothétie et isométrie préservant l'orientation près. Lorsque $N = 3$ cet espace est une sphère de dimension deux dont l'équateur représente les configurations colinéaires, chaque hémisphère correspondant à l'une des deux orientations possibles du triangle (voir [18, 21, 22] et le prologue de [8]). C'est sur cet espace qu'est défini le potentiel normalisé (shape potential) $\tilde{U} = \sqrt{I}U$, invariant par homothétie et dont la théorie de Morse qui lui est associée joue un rôle important.

J'en arrive aux Questions : alors que les trois dernières sont essentiellement géometriques et même topologiques, dans l'esprit de Poincaré, la Question 1 qui concerne les "configurations centrales" (voir [19]) est purement algébrique. À ma connaissance, si l'on excepte les points de Lagrange dans le problème restreint des trois corps, Poincaré n'a jamais mentionné les configurations centrales qui, en plus d'ètre associées aux seules solutions explicites du problème des trois corps, jouent un rôle fondamental à la fois dans les changements de topologie des niveau d'énergie-moment et dans l'analyse des collisions. Leur définition est très simple : ce sont les configurations de N corps massifs ponctuels dans $\mathbb{R}^d$ telles que, relachés sans vitesse initiale, les N corps s'effondrent homothétiquement en temps fini sur leur centre de gravité. Dans un espace de dimension paire ces configurations admettent des solutions de type keplerien, les mouvements homographique déjà mentionnés au cours desquels la configuration ne change pas à homothétie et isométrie près. Cas particuliers de ces solutions correspondant à des mouvements kepleriens d'excentricité nulle, les mouvements d'équilibre relatif deviennent des équilibres après réduction par la symétrie de rotation. L'étude d'un champ de vecteurs commençant naturellement par l'étude des équilibres et les équilibres du problème des N corps n'existant qu'après une telle réduction, cela montre l'importance de ces solutions.

La Question 1 : N masses positives étant données, existe-t-il un nombre fini de configurations centrales à homothétie et isométrie près. Cette question, qui fait partie de la liste de Smale de problèmes mathématiques pour le prochain siècle [28], avait été posée par Chazy et Wintner et est le numéro 9 dans la liste de 17 problèmes établie en 2012 par Albouy, Cabral et Santos [1]. Des réponses positives avaient déjà été données, au dix-huitième siècle par Euler (pour les configurations colinéaires de trois corps) et Lagrange (le triangle équilatéral quelles que soient les masses !), en 1910 par Moulton pour le problème des N corps sur la droite, en 1996 par Albouy pour quatre masses égales, en 2006 par Hampton et Moeckel pour 4 masses quelconques et en 2012 génériquement en les masses (un but sans doute plus réaliste) pour cinq corps par Albouy et Kaloshin [3]. Les configurations centrales étant des points critiques de la restriction à la sphère des formes du potentiel normalisé $\tilde{U}$, le problème est algébrique. Il se révèle être particulièrement difficile car recherchant parmi les solutions d'un système d'equations algébriques celles qui sont réelles et positives. Et d'ailleurs, lorsqu'une des masses est négative, un contre-exemple à la finitude pour $N = 5$ (masses -1,4,4,4,4) a été donné en 1999 par Gareth Roberts [26].

La Question 2 demande s'il existe des orbites périodiques. La classique relation de Lagrange-Jacobi $\ddot{I} = 4E + 2U$, dans laquelle I est le moment d'inertie d'une configuration de N corps par rapport au centre de gravité, U la fonction potentiel (positive) et $E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i||\dot{r}_i||^2 - U$ l'énergie totale, implique que I n'est pas bornée lorsque l'énergie totale est positive ou nulle. Des orbites périodiques ne peuvent donc exister que si l'énergie totale est négative. L'importance de ces orbites avait été mise en avant par Poincaré qui, demandant si elles pouvaient être denses dans l'ensemble des solutions bornées du problème des trois corps, les avait considérées comme

> la seule brèche par laquelle pénétrer une place réputée jusqu'ici inaccessible.

La question concerne ce que, dans sa conférence en 1998 au Congrès international des mathématiciens [14], Michael Herman avait appelé *"La question ouverte la plus ancienne dans les Systèmes dynamiques"* : arbitrairement près des conditions initiales d'une quelconque solution périodique du problème plan des trois corps existe-t-il des conditions initiales conduisant à des solutions non bornées ? Pour le problème des deux corps dans $\mathbb{R}^2$ l'énergie est bornée inférieurement tant que le moment cinétique est différent de zéro, le minimum (négatif) étant réalisé par le mouvement circulaire. Un résultat analogue pour le problème des trois corps dans $\mathbb{R}^3$ aurait impliqué que les orbites proches d'une orbite périodique ayant une énergie proche du minimum auraient été piégées, ce qui aurait impliqué une réponse négative à la "question ouverte la plus ancienne", mais ce n'est pas le cas et la question reste ouverte. Cependant, en 2020 Albouy et Dullin avaient remarqué que, de façon surprenante, pour le problème des trois corps dans $\mathbb{R}^4$ la même conclusion que pour le problème des deux corps dans $\mathbb{R}^2$ valait tant que le moment cinétique, était un bivecteur de rang maximal, c'est-à-dire de rang 4 (voir [2]). Notons que le fait que l'énergie d'une solution soit bornée inférieurement implique en particulier que celle-ci ne s'approche pas trop près d'une collision.

Linéariser le flot le long d'une solution périodique montre l'existence de blocs de Jordan dus aux symétries, mais la réduction (obtenue en passant au quotient par les symétries qui survivent à la fixation du moment cinétique) et la fixation de l'énergie rétablissent la stabilité linéaire. C'est la théorie non linéaire qui pose le vrai problème, précisément l'existence de solutions quasi-périodiques proches d'une solution périodique linéairement stable, c'est-à-dire la théorie KAM, acronyme de Kolmogorov, Arnold, Moser, initiée par Kolmogorov dans sa célèbre adresse au Congrès international des mathématiciens (ICM) en 1954.

Poincaré semble être le premier mathématicien ayant eu une vision claire de la nature géométrique de l'espace des phases (voir [5]). Il comprend en particulier qu'alors qu'un tore invariant complètement résonant, simple réunion de solutions périodiques sans interaction, n'a aucune signification dynamique et donc aucune raison de résister à une petite perturbation, au contraire, un tore invariant non résonant étant l'adhérence de l'une quelconque des solutions quasi-périodiques qui le composent, est un objet dynamique signifiant qui pourrait éventuellement résister à une perturbation suffisamment petite à la condition qu'il satisfasse à une condition arithmétique qui contrôle la manière dont l'adhérence de chacune des orbites qu'il contient le remplit. C'est la fameuse phrase de la section 149 du chapitre XIII du livre *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* où, même s'il estime peu probable une telle éventualité, Poincaré évoque la possibilité de la convergence des séries de Lindstedt, c'est-à-dire la possibilité de l'existence de tores invariants analytiques, du type de ceux appelés aujourd'hui tores KAM (pour plus de détails, voir [10]). Pour des raisons de géométrie symplectique, la dimension des tores invariants fournis par la théorie KAM est en général la moitié de celle de l'espace des phases. Ainsi, dans une hypersurface d'énergie fixée, leur complémentaire est connexe dès que la dimension de l'espace des phases est supérieure ou égale à 6, ce qui est le cas du problème plan des trois corps après réduction de la symétrie de rotation, un cas où la théorie s'applique directement. Notons que le problème spatial est sensiblement plus délicat (voir [13]). Ceci laisse comme meilleur ersatz de stabilité ce qui est appelé la "stabilité KAM" où une solution périodique est "entourée" d'un ensemble de tores KAM invariants ayant une mesure positive, ce qui laisse ouverte la possibilité de la "diffusion d'Arnold" dans laquelle les orbites du complémentaire des tores diffusent très lentement (estimées de Nekhoroshev) vers l'infini. En 2000 Carles Simó [27] a montré qu'une telle stabilité KAM a lieu pour la solution en Huit après réduction alors que ce n'est absolument pas le cas pour l'équilibre relatif équilatéral de Lagrange lorsque les trois masses sont égales [19]. Certains voient dans ce fait l'une des origines du roman de science fiction de Liu Ci Xin *Le problème des trois corps* (voir [11]).

La question 3, chère à l'auteur (see [22]), demande si chaque tresse à N brins (i.e., chaque classe d'homotopie libre[1] de $\mathbb{C}^N \setminus \Delta$, l'espace de configuration du problème plan des N corps) est réalisée par le graphe d'une solution périodique $[0,T] \ni t \mapsto (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \cdots, \vec{r}_N(t)) \in \mathbb{C}^N \setminus \Delta$ (Δ est l'ensemble des configurations de collision). Comme dans la question 2, l'énergie totale doit être négative. Une question analogue concerne les tresses relatives qui sont définies par des solutions périodiques relatives, c'est-à-dire des solutions du problème après réduction par la symétrie de rotation.
Considérons le problème plan des trois corps : une syzygie signifie un alignement des trois corps ; encore appelées éclipses pour une raison qui ne devrait pas étonner le lecteur (voir une illustration dans [22]) ces configurations correspondent aux points situés sur l'équateur de la sphère des formes. La classe d'homotopie libre d'un lacet dans la sphère des formes privée des trois points de collision est déterminée par sa suite de syzygies (ou éclipses ou alignements) qui définit ses intersections successives avec l'un des trois arcs constituant le complémentaire dans l'équateur des trois points correspondant aux collisions ; de cette suite se déduit une suite "réduite" de syzygies de laquelle toutes les répétitions (stutters, bégaiements) sont éliminées. En effet, une répétition correspond à l'intersection du même arc successivement dans des directions opposées et peut donc être éliminée par une homotopie.

Par analogie avec le cas des variétés riemaniennes compactes pour lesquelles chaque classe d'homotopie libre est réalisée par une géodésique périodique dont

[1]Homotopie libre signifie qu'on ne demande pas à la déformation entre deux lacets de $\mathbb{C}^n \setminus \Delta$ de fixer un point-base.

la longueur est minimale parmi toutes les courbes fermées appartenant à cette classe, on est tenté d'essayer la minimisation d'une fonctionnelle sous les contraintes que nous souhaitons imposer. L'utilisation du Principe de moindre action comme outil de preuve de l'existence de solutions périodiques satisfaisant des contraintes de nature topologique avait été proposée par Poincaré en 1892 dans une note à l'Académie des sciences [24]. Tout-à-fait conscient du problème posé par les collisions – pour le potentiel Newtonien, l'action reste finie lors des collisions, donc rien n'exclue a priori leur présence dans une orbite minimale – Poincaré triche, remplaçant le potentiel newtonien proportionnel à l'inverse de la distance par ce qu'on appelle aujourd'hui un potentiel de force forte proportionnel à l'inverse du carré de la distance. Il prouve alors facilement que chaque classe d'homologie est réalisée par une solution périodique. Ce résultat a été précisé par Montgomery qui montre, pour de tels potentiels, l'existence de solutions de moment cinétique nul du problème des trois corps qui réalisent chaque suite de syzygies sans répétition.

Après avoir rappelé les cas dans lesquels le problème des collisions a été surmonté, en particulier la solution en Huit et le lemme de Marchal [16, 6] qui garantit l'absence de collisions dans toute orbite minimisant l'action en temps fixé entre deux configurations données, Montgomery explique que ni le Principe de moindre action ni la minimisation de la métrique dégénérée dite de Jacobi-Maupertuis ne s'applique au problème des syzygies. Il explique alors comment dans [20] Rick Moeckel et lui ont pu résoudre le problème pour $N = 3$ dans le cas de masses presque égales à l'aide d'une méthode dynamique qui, paradoxalement, utilise les propriétés des solutions subissant une collision totale : précisément, ils résolvent la question originale au prix d'admettre de très longues suites de répétitions et de l'impossibilité de réaliser un moment cinétique nul. Expliquons ceci dans le cas de masses égales : le fait topologique crucial est que, privée des trois points correspondant aux collisions doubles, la sphère des formes se rétracte sur le graphe plongé formé par les solutions isocèles. Les sommets de ce graphe sont d'une part les deux triangles équilatéraux de Lagrange (les pôles), d'autre part les trois configurations colinéaires d'Euler qui partagent en deux les grands cercles correspondant à chacune des trois configurations isocèles. Projetées sur la sphère des formes, les solutions restent proches de ce graphe avec des oscillations qui sont la raison des longues suites de répétitions (bégaiements). De plus, chaque fois que change l'arête qu'elles suivent, elles passent très près d'une collision avec pour configuration limite le triangle équilatéral de Lagrange. Il en résulte que chaque suite bi-infinie dans laquelle le nombre de fois M que la même syzygie se répète est assez grand est effectivement réalisée par une solution sans collision pourvu que le moment cinétique ne soit pas nul. Plus généralement, cette propriété vaut également dans le cas de masses presque égales (et toujours de moment cinétique non nul) Techniquement, ce dont il s'agit est l'intersection compliquée de variétés invariantes de points fixes qui spiralent sur le bord de McGehee à l'infini[2].

[2]Lors d'une collision, la conservation de l'énergie implique que les vitesses des corps concernés tendent vers l'infini ; Dick McGehee a introduit dans [17] une compactification partielle

Plusieurs questions restent ouvertes, en particulier l'existence de solutions périodiques relatives de moment cinétique nul qui réalisent un type donné de tresse relative et l'existence si l'on relâche la contrainte de périodicité relative d'une solution réalisant une suite finie arbitraire d'éclipses.

À la fin de 2019, Maderna et Venturelli [15] ont montré l'existence de solutions hyperboliques du problème des N corps dont la configuration limite à $t = +\infty$ et la configuration initiale à $t = 0$ sont prescrites. La preuve, de nature variationnelle, repose sur la théorie KAM faible et le résultat peut être vu comme une généralisation du théorème de Marchal cité dans la Question 3. Une autre preuve, basée sur une renormalisation de l'action Lagrangienne, a été donnée plus récemment par Davide Polimeni et Suzanna Terraccini [25].

La très courte Question 4, la seule en énergie positive, concerne le problème plus difficile qu'est le contrôle simultané des formes limites aux temps $t = -\infty$ et $t = +\infty$. Elle commence par la remarque qu'un centre coulombien répulseur et un centre keplerien attracteur diffractent exactement de la même façon un faisceau entrant de particules. Dans les deux cas, les directions asymptotiques θ des particules qui sortent sont denses, n'évitant que les deux angles 0 et π. Elles définissent une "section de diffusion" $d\sigma = f_* db$, où $\theta = f(b)$ est l'expression de l'angle de sortie comme fonction de la coordonnée du rayon entrant sur un plan orthogonal et db est la mesure de Lebesgue. Tout ceci se généraliserait bien à la diffusion dans le problème newtonien des N corps si l'asymptotique des rayons hyperboliques entrants n'était pas affectée d'un terme logarithmique $\log|t|$, ce qui empêche les solutions d'être asymptotes à une quelconque droite. Précisément, pour 3 corps dans $\mathbb{R}^3$, Chazy a montré dans [4] que le développement asymptotique du vecteur position $q(t) \in (\mathbb{R}^3)^3$ le long d'un mouvement hyperbolique (direct (+) ou rétrograde (−)) est de la forme

$$q_\pm(t) = A_\pm t - (\nabla U(A_\pm)) \log(|t|) + B_\pm + O\left(\frac{\log|t|}{t}\right), \quad t \to \pm\infty.$$

Asymptotiquement l'énergie totale E est purement cinétique,

$$E = \frac{1}{2}||\dot{q}(t)||^2 = \frac{1}{2}||A_\pm||^2, \quad \text{that is} \quad A_\pm = \pm\sqrt{2E}s_\pm,$$

où $s_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{q_\pm(t)}{||q_\pm(t)||}$ est la forme asymptotique. Un délicat éclatement de l'infini est utilisé pour montrer que les paramètres (A_-, B_-) de Chazy determinent une trajectoire bien définie à une translation du temps près. De plus, les trajectoires pour lesquelles A_- est fixé (c'est-à-dire E et s_- fixés) forment un espace affine naturellement paramétré par les B_- dans l'espace orthogonal à s_-, ce qui, joint au fait que dans un tel rayon les trajectoires restent à une distance bornée l'une de l'autre lorsque $t \to -\infty$, montre que ces B_- peuvent jouer le rôle des paramètres b dans l'exemple initial. Nous pouvons maintenant formuler

---

de l'espace des phases qui est signifiante dans la mesure où après renormalisation le champ de vecteurs ne s'annule pas identiquement sur le bord qui a été ajouté à l'infini.

la dernière question ouverte : l'image diffusée d'un rayon rempli de solutions du problème des N corps est-elle ouverte et dense dans la sphère des directions sortantes dans l'espace de configuration (jusqu'à maintenant tout ce qu'on sait est que son intérieur est non vide). Le résultat de Maderna et Venturelli implique qu'un rayon donné avec A_- fixé atteint chaque point de l'espace de configuration avant de reculer vers l'infini lorsque $t \to +\infty$ mais les méthodes de minimisation ne s'appliquent pas sur la totalité de l'axe du temps. Des travaux récents de Yu Guowei et collaborateurs attaquent le problème dans le cas du problème restreint des trois corps.

N.B. Des appendices détaillés donnent au lecteur des définitions précises de notions indispensables à la compréhension de l'ouvrage, telles que lagrangiens et hamiltoniens, structures symplectiques, réduction, régularisation, le groupe orthogonal et le groupe des tresses ....

En conclusion, c'est un très joli livre qui contient de nombreuses ouvertures vers des aspects variés du problème des N corps, un livre très personnel également, dans lequel l'auteur évoque souvenirs, experiences, discussions et même quelques bons repas. Un tel livre nous rappelle que le problème des trois corps, un acteur clé dans le développement de notions mathématiques fondamentales en topologie et en dynamique, est toujours bien vivant aujourd'hui.

References

[1] Albouy, A., Cabral, H. and Santos, A. (2012) *Some problems in the classical N-body problem*, Celest. Mech. Dyn. Astron. **113**, 369-375.

[2] Albouy, A. and Dullin, V. (2020) *Relative equilibria of the 3-body problem in* $\mathbb{R}^4$, Journal of Geometric Mechanics **12**, 323-341.

`http://www.aimsciences.org/article/doi/10.3934/jgm.2020012`.

[3] Albouy A. and Kaloshin V. (2012) *Finiteness of central configurations of five bodies in the plane.* Ann. Math. **176**, 535-588.

[4] Chazy J., (1922) *Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **39**, 29-130.

[5] Chenciner A. (1999) *De la Mécanique céleste à la théorie des systèmes dynamiques, aller et retour : Poincaré et la géométrisation de l'espace des phases* in Epistémologie des systèmes dynamiques, Sara Franceschelli, Michel Paty, Tatiana Roque éditeurs, Hermann 2007

[6] Chenciner A. (2002) *Action Minimizing Solutions of the Newtonian n-body Problem: From Homology to Symmetry* Internal Congress of Mathematicians Vol. III, 279-294

[7] Chenciner A. (2004) *Rapport sur "Oeuvres complètes de Jean Le Rond D'Alembert : premiers textes de mécanique céleste 1747 - 1749, sous*

la direction de Michelle Chapront-Touzé, CNRS Editions". Gazette des mathématiciens $n^0$99, 107-114.

[8] Chenciner A. (2005) *De l'espace des triangles au problème des trois corps.* Gazette des mathématiciens 104, 22-38

[9] Chenciner A. (2007) *Three body problem*, Scholarpedia 2(10):2111.

`http://www.scholarpedia.org/article/Three_body_problem`

[10] Chenciner A. (2015) *Poincaré and the Three-Body Problem* in Poincaré 1912-2012, Bertrand Duplantier, Vincent Rivasseau Editors, Birkhauser, 51-149

[11] Chenciner A. (2024) *Le livre de Liu Cixin "Le problème à trois corps"* Bulletin d'information de l'IMCCE, voir

`https://perso.imcce.fr/alain-chenciner/preprint.html`

[12] Fejoz J. Animation de la famille P12

`https://www.ceremade.dauphine.fr/~fejoz/SolutionsNCorps/p12.html`

[13] Fejoz J. (2004) *Démonstration du "théorème d'Arnold" sur la stabilité du système planétaire (d'après M. Herman)* Ergod. Th. & Dynam. Sys **24**, 1-62

[14] Herman M. (1998) *Some open problems in dynamical systems.* Proc. Int. Congress of Math. **II**, 797-808.

[15] Maderna E. & Venturelli A. *Viscosity solutions and hyperbolic motions: A new PDE method for the N-body problem* Ann. Math. **192**, 499-550.

[16] Marchal C. (2002) *How the method of minimization of action avoids singularities* Celest. Mech. Dyn. Astron. 83, 325-353

[17] McGehee R. (1974) *Triple collision in the collinear three-body problem* Invent. Math. **27**, 191-227

[18] Moeckel R. (1988) *Some qualitative features of the three-body problem*, Contemp. Math. **81**, 1-21.

[19] Moeckel R. (1994) *Central configurations*, 9(4):10667.

`http://www.scholarpedia.org/article/Central_configurations`

[20] Moeckel R. and Montgomery R. (2015) *Realizing all reduced syzygy sequences in the planar three-body problem.* Nonlinearity **28**, 1919-1935.

[21] Montgomery R. (2015) *The three-body problem and the shape sphere.* Amer. Math. Monthly **122**, no. 4, 299-321.

[22] Montgomery R (2019) *The Three-Body Problem* Scientific American
`https://www.scientificamerican.com/article/the-three-body-problem/`

[23] Montgomery R. (2010) *Choreographies* Scholarpedia
`http://www.scholarpedia.org/article/N-body_choreographies`

[24] Poincaré H. (1896) *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action*, C.R.A.S. t. **123**, 915-918, in Oeuvres, tome VII.

[25] Polimeni D. & Teraccini S. (2024) *On the existence of minimal expansive solutions to the N-body problem* Inventiones mathematicae (2024) 238:585–635
`https://doi.org/10.1007/s00222-024-01289-7`

[26] Roberts G. E. (1999) *A continuum of relative equilibria in the five-body problem* Physica D 127, 141-145

[27] Simó C (2000) *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem* in Proc. Cele. Mech. Conference dedicated to D. Saari for his 60th birthday, American Mathematical Society, 209-228

[28] Smale S. (1988) *Mathematical Problems for the Next Century* The Mathematical Intelligencer, 20, N. 2, 7-15